# 第 31 講　円順列やじゅず順列

**31**　白球が 1 個，赤球が 4 個，青球が $n$ 個用意されている．これら $n+5$ 個の球をすべて使って以下のように並べる場合，並べ方の総数を求めよ．

(1)　横 1 列に並べる場合，両端が赤で横 1 列に並べる場合，赤が隣り合わないで横 1 列に並べる場合の各場合

(2)　円形に並べる場合

(3)　ネックレス状に並べる場合



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第31講　円順列やじゅず順列

31　$k$ を2以上の自然数とする．$2k+2$ 個の椅子が円形に並んでいる．$k$ 人が，どの2人も隣り合わないように，椅子に座る場合の数を求めよ．ただし，人は区別できないものとする．

【選択肢】

㋐　$k$ が奇数のとき $\dfrac{k-1}{2}$，$k$ が偶数のとき $\dfrac{k+2}{2}$

㋑　$k$ が奇数のとき $\dfrac{k+1}{2}$，$k$ が偶数のとき $\dfrac{k+2}{2}$

㋒　$k$ が奇数のとき $\dfrac{k-1}{2}$，$k$ が偶数のとき $\dfrac{k}{2}$



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 31 講　円順列やじゅず順列

31 白球が 1 個，赤球が 4 個，青球が $n$ 個用意されている．これら $n+5$ 個の球をすべて使って以下のように並べる場合，並べ方の総数を求めよ．

(1) 横 1 列に並べる場合，両端が赤で横 1 列に並べる場合，赤が隣り合わないで横 1 列に並べる場合の各場合

(2) 円形に並べる場合

(3) ネックレス状に並べる場合

**【答】** (1) 順に $\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{24}$，$\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2}$，

$\dfrac{(n-1)n(n+1)^2(n+2)}{24}$　(2) $\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{24}$

(3) $n$ が偶数のとき $\dfrac{(n+2)(n+4)(n^2+4n+6)}{48}$，

$n$ が奇数のとき $\dfrac{(n+1)(n+3)(n^2+6n+11)}{48}$

**【解答】**

(1) (Ⅰ) 横 1 列に並べる場合

合計で $n+5$ 個並べることになるが，この $n+5$ か所に白，赤，青の順に配置を決めていくことにすると，

$n+5$ か所中，白球の場所 1 か所を選ぶので，${}_{n+5}C_1$ 通り．

次に，残った $n+4$ か所中，赤球の場所 4 か所を選ぶので，${}_{n+4}C_4$ 通り．

最後に青球 $n$ 個の場所は 1 通りに決まる．

以上より，横 1 列に並べる方法は

$${}_{n+5}C_1\times{}_{n+4}C_4\times1=\boldsymbol{\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{24}}\ \text{（通り）}$$

(Ⅱ) 両端が赤で横 1 列に並べる場合

まず最初に両端の赤を並べる方法は，1 通り．

次に，残った $n+3$ か所に白，赤，青の順に配置を決めていくことにすると，

$n+3$ か所中，白球の場所 1 か所を選ぶので，${}_{n+3}C_1$ 通り．

次に，残った $n+2$ か所中，残った赤球の場所 2 か所を選ぶので，${}_{n+2}C_2$ 通り．

最後に青球 $n$ 個の場所は 1 通りに決まる．

以上より，両端が赤で横 1 列に並べる方法は

$$1\times{}_{n+3}C_1\times{}_{n+2}C_2\times1=\boldsymbol{\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2}}\ \text{（通り）}$$

(Ⅲ) まずは，赤球以外の白球 1 個と青球 $n$ 個の合計 $n+1$ 個を並べる．

$n+1$ か所中，白球の場所 1 か所を選ぶので，${}_{n+1}C_1$ 通り．

次に，並べられた $n+1$ 個の球どうしの間の $n$ か所と両端の 2 か所の合計 $n+2$ か所の中から，赤球の場所 4 か所を選ぶので，${}_{n+2}C_4$ 通り．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

以上より，赤球が隣り合わないで横１列に並べる方法は

$${}_{n+1}\mathrm{C}_1 \times {}_{n+2}\mathrm{C}_4 = \boldsymbol{\frac{(n-1)n(n+1)^2(n+2)}{24}} \text{（通り）}$$

(2)　まずは白球を１か所に固定する．次に残りの $n+4$ か所の中から赤球の場所４か所を選ぶので，${}_{n+4}\mathrm{C}_4$ 通り．

最後に青球 $n$ 個の場所は１通りに決まる．

以上より，円形に並べる方法は

$${}_{n+4}\mathrm{C}_4 \times 1 = \boldsymbol{\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{24}} \text{（通り）}$$

(3)　(Ⅰ)　**$n$ が偶数のとき**

(2)で求めた円形に並べる方法のうち，色の並びが左右対称になっているのは ${}_{\frac{n+4}{2}}\mathrm{C}_2$ 通りで，これら以外はある並びに関して必ず左右対称な並び方が存在する．

よってネックレス状に並べるとき

$$\frac{1}{2}\left({}_{n+4}\mathrm{C}_4 - {}_{\frac{n+4}{2}}\mathrm{C}_2\right) + {}_{\frac{n+4}{2}}\mathrm{C}_2 = \boldsymbol{\frac{(n+2)(n+4)(n^2+4n+6)}{48}} \text{（通り）}$$

(Ⅱ)　**$n$ が奇数のとき**

色の並びが左右対称になっているのは ${}_{\frac{n+3}{2}}\mathrm{C}_2$ 通りで，これら以外はある並びに関して必ず左右対称な並び方が存在する．

よってネックレス状に並べるとき

$$\frac{1}{2}\left({}_{n+4}\mathrm{C}_4 - {}_{\frac{n+3}{2}}\mathrm{C}_2\right) + {}_{\frac{n+3}{2}}\mathrm{C}_2 = \boldsymbol{\frac{(n+1)(n+3)(n^2+6n+11)}{48}} \text{（通り）}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第 31 講　円順列やじゅず順列

31　$k$ を 2 以上の自然数とする．$2k+2$ 個の椅子が円形に並んでいる．$k$ 人が，どの 2 人も隣り合わないように，椅子に座る場合の数を求めよ．ただし，人は区別できないものとする．

【選択肢】

㋐　$k$ が奇数のとき $\dfrac{k-1}{2}$，$k$ が偶数のとき $\dfrac{k+2}{2}$

㋑　$k$ が奇数のとき $\dfrac{k+1}{2}$，$k$ が偶数のとき $\dfrac{k+2}{2}$

㋒　$k$ が奇数のとき $\dfrac{k-1}{2}$，$k$ が偶数のとき $\dfrac{k}{2}$

【答】 ㋑

【解答】

まずは 2 個の椅子を固定して，その隣りに，人の座る椅子，人の座らない椅子，人の座る椅子，人の座らない椅子，……，人の座る椅子，人の座らない椅子と，残りの椅子が 1 つになるまで円形に並べていく．

この段階で人が座らない椅子は最初の 2 個以外はすべて連続していなく，また，人の座る椅子も同じく連続していない．

最初に固定した 2 個を始まりとし，時計まわりに人の座らない椅子に番号をつけると，連続していない人の座らない椅子は 1 から $k-1$ まで番号がつくことになる．

残りの椅子をどこに配置するかを考える．

(Ⅰ)　$k$ が奇数のとき

$l$ を整数として，$1 \leqq l \leqq \dfrac{k-1}{2}$ に対し，$l$ 番目の椅子の隣りに最後の椅子を置いた場合と $k-l$ 番目の椅子の隣りに最後の椅子を置いた場合は，回転することで同じ並べ方と考えられるので $\dfrac{k-1}{2}$ 通り．

また固定した椅子の隣りに最後の椅子を置いた場合が 1 通り．

よって $\dfrac{k-1}{2}+1=\dfrac{k+1}{2}$（通り）

(Ⅱ)　$k$ が偶数のとき

$l$ を整数として，$1 \leqq l \leqq \dfrac{k}{2}-1$ に対し，$l$ 番目の椅子の隣りに最後の椅子を置いた場合と $k-l$ 番目の椅子の隣りに最後の椅子を置いた場合は，回転することで同じ並べ方と考えられるので $\dfrac{k}{2}-1$ 通り．

また固定した椅子の隣りに最後の椅子を置いた場合が 1 通り．

更に固定した椅子の真向かいに最後の椅子を置いた場合が 1 通り．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって $\dfrac{k}{2}-1+1+1=\dfrac{k}{2}+1=\dfrac{k+2}{2}$（通り）

以上より，求める場合の数は，**$\boldsymbol{k}$ が奇数のとき $\boldsymbol{\dfrac{k+1}{2}}$**，**$\boldsymbol{k}$ が偶数のとき $\boldsymbol{\dfrac{k+2}{2}}$**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。